

## MESURE DE LA COMPETITIVE BALANCE DANS LES LIGUES DE SPORTS PROFESSIONNELS

Faut-il distinguer les ligues fermées des ligues avec promotion et relégation ?

Jean-Pascal Gayant et Nicolas Le Pape

**Presses de Sciences Po** | *Revue économique*

2014/0 - Prépublication  
pages à

ISSN 0035-2764

Article disponible en ligne à l'adresse:

<http://www.cairn.info/revue-economique-2014-0-page-.htm>

Pour citer cet article :

Gayant Jean-Pascal et Le Pape Nicolas, « Mesure de la Competitive Balance dans les ligues de sports professionnels » Faut-il distinguer les ligues fermées des ligues avec promotion et relégation ?, *Revue économique*, 2014/0 Prépublication, p. -. DOI : 10.3917/reco.pr2.0040

Distribution électronique Cairn.info pour Presses de Sciences Po.

© Presses de Sciences Po. Tous droits réservés pour tous pays.

La reproduction ou représentation de cet article, notamment par photocopie, n'est autorisée que dans les limites des conditions générales d'utilisation du site ou, le cas échéant, des conditions générales de la licence souscrite par votre établissement. Toute autre reproduction ou représentation, en tout ou partie, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit, est interdite sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, en dehors des cas prévus par la législation en vigueur en France. Il est précisé que son stockage dans une base de données est également interdit.

# Mesure de la *Competitive Balance* dans les ligues de sports professionnels

## Faut-il distinguer les ligues fermées des ligues avec promotion et relégation ?

Jean-Pascal Gayant\*  
Nicolas Le Pape\*\*

*Dans cet article, nous étudions la capacité des indices traditionnels de Competitive Balance à correctement mesurer l'attractivité des ligues de sports professionnels, en différenciant les ligues fermées des ligues avec promotion et relégation. Sur la base d'un dispositif original de construction de configurations hypothétiques de classements finaux des clubs, nous mettons en évidence l'inaptitude des indices traditionnels, et en particulier de l'indice de Gini, à rendre compte de l'attractivité des différentes ligues. En nous inscrivant dans la démarche se fondant sur le « parallèle » entre modèles de décision dans le risque et mesure des inégalités (à la suite de Yaari [1987]), nous proposons alors une généralisation de l'indice de Gini permettant de convenablement mesurer l'attractivité des différents types de ligues.*

### MEASURING COMPETITIVE BALANCE IN PROFESSIONAL SPORTS LEAGUES: SHALL CLOSED LEAGUES AND PROMOTION & RELEGATION LEAGUES BE DISTINGUISHED?

*In this paper, we investigate the ability of traditional indices of Competitive Balance to properly measure the attractiveness of professional sports leagues, differentiating Closed leagues and Promotion & Relegation leagues. Using an original device that allows to build hypothetical configurations of final rankings of clubs, we highlight the inability of traditional indices, and especially that of the Gini index, to account for the attractiveness of the different types of leagues. When adopting the approach based on the "parallel" between decision under risk and measurement of inequalities (following Yaari [1987]), we propose a generalization of the Gini index that properly reflects the attractiveness of different types of leagues.*

Classification JEL : L83, D63, D81

\* GAINS-TEPP, Université du Maine. *Correspondance* : Faculté de droit et de Sciences économiques, Université du Maine, avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex. *Courriel* : jpgayant@univ-lemans.fr

\*\* CREM, Université de Caen Basse-Normandie. *Correspondance* : Faculté de Sciences économiques et de Gestion – Université de Caen Basse-Normandie, 19 rue Claude Bloch, 14032 Caen cedex. *Courriel* : nicolas.lepape@unicaen.fr (auteur correspondant).

Les auteurs tiennent à remercier les deux rapporteurs anonymes pour leurs critiques et commentaires pertinents.

## INTRODUCTION

Il existe deux formats de ligues de sports professionnels : les ligues fermées (que l'on trouve principalement en Amérique du Nord) et les ligues avec promotion et relégation (que l'on trouve principalement en Europe). Depuis quelques années, certaines grandes ligues européennes (en particulier de football) réfléchissent à la possibilité d'adopter le format nord-américain dans l'optique de sécuriser l'activité des principaux *insiders*<sup>1</sup>, de permettre des stratégies d'investissement à long terme et d'accroître la rentabilité des ligues majeures (et, subséquemment, des clubs qui les composent). Cette option est contestée sous le prétexte d'une spécificité européenne, liée, en particulier, à l'attachement territorial des équipes<sup>2</sup> (dans les ligues fermées, en effet, les équipes sont susceptibles de changer de localisation géographique sous réserve d'un accord de la ligue<sup>3</sup>) et surtout car une telle « fermeture » des ligues se ferait au détriment des consommateurs<sup>4</sup>. La relation entre niveau de *Welfare* engendré par une ligue et format de la ligue est donc ambiguë.

Depuis ses débuts, la littérature en économie du sport fait du degré de *Competitive Balance* au sein de la ligue l'un des déterminants majeurs du *Welfare* qu'elle engendre. La *Competitive Balance* est une mesure de l'intensité de la rivalité sportive dont on suppose qu'elle peut être mesurée à partir de la distribution finale de points observée<sup>5</sup>. Le postulat implicitement retenu est qu'un faible écart de points entre les équipes est le signe, *a posteriori*, d'un fort niveau d'intensité concurrentielle. L'idée historiquement mise en avant est que le maintien d'un haut niveau de cette rivalité concurrentielle garantit une attractivité durable pour le spectacle proposé. En conséquence, pour les ligues fermées nord-américaines, une grande partie des travaux s'est focalisée sur les mécanismes susceptibles de restaurer la *Competitive Balance* : dispositifs visant à limiter le déséquilibre entre les budgets des clubs – partage des recettes de guichet (*gate revenue sharing*) et de droits de diffusion – ou dispositifs visant à limiter le déséquilibre dans la répartition des talents entre les clubs – plafonds salariaux (*salary caps*) et taxes « de luxe » (*luxury taxes*) pour les salaires dépassant les plafonds, tirage au sort de l'allocation des jeunes talents ou ordre préférentiel inverse au précédent classement pour cette allocation (*draft*)...

---

1. Dans le football français, par exemple, le budget moyen d'un club de ligue 1 est cinq fois supérieur à celui d'un club de ligue 2. Une relégation durable oblige un club à diminuer considérablement sa masse salariale, personnels administratifs inclus.

2. Plus largement, l'Europe et ses institutions communautaires sont réticentes à l'idée de considérer les clubs sportifs comme de pures entreprises commerciales de spectacle.

3. Pour cette raison, les clubs font figure de simples franchisés et sont souvent désignés sous le terme de « franchises ».

4. Comme l'indique Szymanski : « *Promotion and relegation is a superior system from the point of view of consumers, although clearly inferior for the profitability of teams* » ([2003], p. 1175).

5. Mesurer la rivalité concurrentielle sur la seule distribution finale de points (*within season competitive balance*) est une optique à l'évidence restrictive. Différents travaux portent sur la mesure de cette rivalité, tout au long du déroulement du championnat, voire lors du déroulement des matchs eux-mêmes. Les outils que nous développons dans cet article se prêtent à une utilisation sur des distributions de points « provisoires », c'est-à-dire mesurées avant l'issue du championnat. Néanmoins, pour juger de la rivalité concurrentielle dans une optique de long terme ou pour comparer différentes formules de compétition, le recours aux distributions finales de points reste la norme.

Mais la pure rivalité concurrentielle est-elle, *in fine*, la garante d'une attractivité durable des ligues ? Plus largement, la *League Welfare Function* est-elle une fonction incontestablement croissante du degré de *Competitive Balance* et y a-t-il lieu de différencier les ligues selon leur format ? À la suite d'un article de Sloane [1971], la discussion s'est d'abord focalisée sur la différenciation entre les objectifs supposés des clubs dans les ligues fermées et dans les ligues ouvertes<sup>6</sup> (maximisation du profit dans les premières *versus* maximisation des victoires dans les secondes) et sur l'incidence de cette différenciation sur les caractéristiques des fonctions objectifs des ligues. Le débat s'est désormais déplacé sur le terrain du degré de déséquilibre compétitif socialement désirable. En effet, comme l'explique Szymanski [2001], les consommateurs se partagent entre de purs supporteurs (les *committed fans*) et des spectateurs plus neutres (les *uncommitted fans*). Or, les *committed fans* sont inégalement répartis (Marseille, Paris ou Saint-Étienne ont plus de supporteurs que Troyes, Évian ou Ajaccio). Ainsi la fonction objectif d'une ligue devrait tenir compte du poids relatif des supporteurs des différentes équipes. Il en résulte l'existence d'un déséquilibre compétitif optimal. C'est désormais dans cette optique que peuvent être modélisées les *League Welfare Function* (voir, par exemple, Dietl *et al.* [2009]). Une telle approche accentue la nécessité de clarifier ce que recouvre le concept d'*attractivité* d'une ligue. C'est l'un des objectifs de cet article. Nous souhaitons montrer qu'il y a lieu de distinguer les ligues fermées des ligues avec promotion et relégation quant à ce qui fonde l'*attractivité* d'une ligue. L'idée simple au cœur de ce travail est qu'il est opportun de différencier les types de ligues selon que la rivalité concurrentielle est intense, en haut, ou, en haut et en bas, de classement. En effet, si, dans une ligue fermée, les (télé)spectateurs focalisent essentiellement leur attention sur l'indécision dans le haut du classement<sup>7</sup>, ceux-ci sont susceptibles d'être attentifs à ce qui se passe en haut comme en bas du classement dans le cas d'une ligue avec promotion/relégation (outre la rivalité pour les premières places qui détermine l'allocation du titre et les places qualificatives pour les compétitions continentales, la rivalité pour le « maintien » dans la présente ligue, qui oppose les équipes de bas de tableau, est source de spectacle et d'« émotions » pour les consommateurs). Ainsi, pour mesurer de manière satisfaisante l'*attractivité* d'une ligue, il convient donc de tenir compte de ce que l'intérêt du public est plus marqué pour certaines zones du classement que pour d'autres (aux yeux des *uncommitted fans* pour le moins<sup>8</sup>). Dans les rares articles consacrés aux spécificités des ligues avec promotion et relégation (Noll [2002], Szymanski et Valetti [2005], Szymanski [2006]), l'intérêt de la rivalité en haut et en bas de classement ne fait pas l'objet d'une attention particulière, pas plus que la question d'une différenciation de la mesure de la *Competitive Balance* entre les deux grands types de ligues. Or, pour éclairer le débat sur le « format » souhaitable de la ligue (y compris dans une optique *Welfariste*), il est opportun

6. Les ligues « ouvertes » peuvent ne pas être des ligues avec promotion et relégation dans l'esprit de certains auteurs, mais plutôt des ligues dans lesquelles l'offre de talents est parfaitement élastique (*cf.* Vrooman [2007]).

7. En réalité, la question est un peu plus nuancée. Dans les ligues fermées nord-américaines, l'intérêt principal de la phase régulière peut résider dans la lutte pour la participation aux *play-offs*. Il se peut alors que la zone de rivalité la plus attractive se situe quelques places en dessous du sommet du classement.

8. Une extension naturelle de cet article serait de généraliser l'approche retenue en intégrant, d'une part, la présence et, d'autre part, l'importance relative, des *committed fans* des différents clubs.

de caractériser ce qui est la source de l'attractivité dans les différents types de ligues ainsi que d'être apte à convenablement mesurer cette attractivité.

Dans cet article, nous allons construire des configurations hypothétiques de classements finaux de ligues afin d'examiner les propriétés des indices traditionnellement utilisés pour la mesure de la *Competitive Balance* (ou plutôt la *Competitive Imbalance* si l'on privilégie l'analogie avec la mesure des inégalités (de revenus)). Nous allons constater que ces indices ne sont, dans l'optique d'attractivité que nous évoquons ci-dessus, que faiblement pertinents pour mesurer la rivalité concurrentielle, aussi bien dans les ligues fermées que dans les ligues avec promotion et relégation. Nous allons alors proposer un indice d'*Imbalance/Attractivité* construit sur la base du calcul d'un nombre de points équivalent (que l'on rencontrerait dans une distribution égalitaire de points) par analogie avec le concept de revenu équivalent sur lequel on peut fonder l'objectivation de l'indice de Gini. En nous appuyant sur la déclinaison de la théorie Duale de Yaari [1987] qui permet d'engendrer le nombre de points/revenu équivalent utile au calcul de l'indice de Gini, nous allons faire reposer les propriétés de l'indice d'*Imbalance/Attractivité* sur les caractéristiques de la fonction de transformation  $\phi$  (dont le rôle est d'allouer une pondération particulière à chaque équipe selon son rang). Dès lors, il nous sera possible de capturer les deux intuitions que nous souhaitons distinguer : « les consommateurs accordent plus d'importance à la rivalité entre les équipes situées *en haut* du classement » (ligue fermée), d'une part, et « les consommateurs accordent plus d'importance à la rivalité entre les équipes situées *en haut et en bas* du classement » (ligue avec promotion et relégation), d'autre part.

Dans une première section, nous allons présenter le cadre formel dans lequel seront calculées les valeurs des différents indices. Dans une seconde section, nous allons caractériser un dispositif permettant de construire des configurations hypothétiques de distributions finales de points et d'établir des propriétés relatives aux valeurs prises par les indices traditionnels dans ces configurations. Dans une troisième section, nous nous focaliserons sur des cas particuliers de ces configurations permettant de mettre en évidence l'inaptitude de la variance<sup>9</sup> et de l'indice de Gini à différencier (ou même à correctement hiérarchiser) des situations correspondant à des niveaux d'attractivité très contrastés (en ligue fermée, d'une part, en ligue avec promotion et relégation, d'autre part). Forts de ces constatations, nous proposerons, dans une quatrième section, un indice susceptible de permettre une différenciation pertinente de la mesure de la *Competitive Balance* selon le type de ligue concerné et nous donnerons une illustration dans le cas de la première ligue de football française. La section finale sera conclusive.

## CADRE FORMEL

Considérons une ligue de sport constituée de  $n$  équipes où, lors d'une saison complète, chaque équipe joue deux fois contre chaque autre équipe (principe de matchs aller-retour). Ainsi, chaque équipe joue  $2(n-1)$  matchs par saison (et le nombre total de matchs joués dans la ligue est  $n(n-1)$ ). Le système

---

9. Ou, de manière équivalente, de l'indice d'Herfindahl.

d'attribution de points est le suivant :  $z_w$  point(s) pour une victoire,  $z_d$  point(s) pour un match nul,  $z_\ell$  point(s) pour une défaite. Supposons, par simplicité, que  $z_\ell = 0$ . Adjemian *et al.* [2012] ont montré que les propriétés des indices d'*Imbalance* sont conditionnées de manière décisive par les caractéristiques du système d'attribution de points et qu'il est essentiel, pour l'obtention de propriétés minimales, que le système garantisse que  $z_w = 2z_d$ . En effet, seul le respect de cette propriété conduit à ce que le total de points obtenus en une saison dans la ligue soit constant et donc indépendant du nombre de victoires ou de matchs nuls (par exemple,  $2n(n-1)$  quand  $z_d = 1$  et donc  $z_w = 2$ ). En outre, le respect de la condition  $z_w = 2z_d$  permet de définir une unique configuration hypothétique correspondant au degré d'*Imbalance* maximal (et pour laquelle tout indice d'*Imbalance* a vocation à prendre sa valeur maximale)<sup>10</sup>. Les systèmes d'attribution de points existants ne vérifient pas toujours cette condition. Par exemple, dans le football européen, le classement final est calculé à partir du système  $z_w = 3$  et  $z_d = 1$ <sup>11</sup>. Les propriétés incitatives d'un système 3-1-0 et d'un système 2-1-0 ne sont pas identiques. Pourtant, il est impératif, pour mesurer convenablement l'*Imbalance*, de recalculer les points attribués selon le second système. Ainsi, le calcul d'un quelconque indice d'*Imbalance* (*ex post*) devra, le cas échéant, se faire sur la base d'un système différent du système incitatif *ex ante*. Cette question est embarrassante car le suspens perçu par les spectateurs peut avoir été légèrement différent de ce que le calcul d'un indice avec le système 2-1-0 suggère. Nous choisissons néanmoins cette option, car la question principale ici traitée n'est pas celle d'un système optimal d'attribution des points (visant, par exemple, à favoriser le comportement offensif et donc « spectaculaire » des équipes), mais bien celle de la mesure acceptable des inégalités sur la base d'une distribution finale constatée de points.

Retenons désormais un unique système 2-1-0 d'attribution des points. Notons  $p_i$  le nombre de points obtenus par la  $i$ ème équipe dans un championnat comprenant  $n$  clubs ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ), et supposons que  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ . L'indice  $i$  matérialise le classement de l'équipe dans le championnat (rang du club). Le pourcentage de points obtenus par une équipe est :

$$s_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{p_i}{2n(n-1)}.$$

Notons également que  $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = 2(n-1)$  et que  $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i = \frac{1}{n}$ .

Définissons maintenant les deux configurations hypothétiques polaires : la *Perfect Competitive Balance* et la *Perfect Competitive Imbalance*.

10. Dans la plupart des ligues fermées américaines, les rencontres ne peuvent pas se terminer par des matchs nuls. En cas d'égalité à la fin du temps réglementaire, une ou plusieurs prolongations permettent de désigner un vainqueur. En conséquence, la question des caractéristiques du système d'attribution des points devient secondaire. En revanche, la mesure de l'attractivité basée sur les seules distributions finales de point reflète mal l'intérêt de certaines confrontations particulièrement indécises. Ceci milite pour l'étude de mesures tenant compte des « circonstances » du déroulement du championnat.

11. En France, le système 3-1-0 a supplanté le système 2-1-0 depuis la saison 1994-1995.

– *Perfect Competitive Balance* (PCB)

Elle peut être objectivée de deux manières distinctes. Soit chaque équipe gagne  $(n - 1)$  matchs et perd  $(n - 1)$  matchs, soit chaque rencontre se termine par un match nul. Dans chacun des deux cas, le nombre de points obtenus par chaque équipe est identique et égal à  $2(n - 1)$ .

Remarquons que ces deux manières de parvenir à la même distribution finale de points sont, du point de vue de l'attractivité de la ligue, potentiellement radicalement opposées. Dans le premier cas (parts égales de victoires et de défaites), la situation peut effectivement avoir été très indécise. Cela correspond à l'idée d'une compétition où chaque équipe a la même chance de gagner décrite, en particulier, par Fort et Quirk [1995]<sup>12</sup>. Dans le second cas (uniquement des matchs nuls), la situation peut avoir été profondément prévisible et ennuyeuse. Ici encore sont pointées les limites de mesures de l'attractivité d'une ligue sur la base de la seule distribution finale des points. Néanmoins, les développements présentés ci-après se prêtent pleinement à de possibles extensions visant à affiner la mesure de l'attractivité des ligues en tenant compte du déroulement complet de la saison.

À l'autre extrémité, il est possible de définir la configuration conduisant à la dispersion maximale des points alloués aux équipes, la configuration de *Perfect Competitive Imbalance* (Horowitz [1997], Utt et Fort [2002], Borooah et Mangan [2012]).

– *Perfect Competitive Imbalance* (PCI)

La première équipe gagne ses  $[2 \times (n - 1)]$  matchs, la deuxième équipe perd deux matchs (les deux matchs joués contre l'équipe précédente) et gagne  $[2(n - 2)]$  matchs, la troisième équipe perd quatre matchs (les quatre matchs joués contre les deux équipes précédentes) et gagne  $[2(n - 3)]$  matchs, ..., la  $n$ ième équipe perd ses  $[2(n - 1)]$  matchs. Pour une équipe de rang  $i$  dans le classement final ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ), le nombre de points obtenus par cette équipe est alors  $p_i = 4(n - i)$ .

La mesure de la *Competitive Balance* s'est traditionnellement faite à l'aide de la variance  $\sigma^2$  du pourcentage de points obtenus<sup>13</sup>, ou, ce qui est cardinalement équivalent, à l'aide de l'indice d'Hirshman-Herfindahl (HHI) calculé sur les pourcentages de points obtenus par les équipes. L'utilisation d'un indice HHI a été naturellement proposée sous le prétexte qu'il existe une analogie entre le pourcentage de points obtenus par une équipe et la part de marché obtenue par une entreprise. Cette analogie n'est pas parfaite : dans ce secteur d'activité, aucune firme ne peut avoir 100 % des parts de marché (sauf dans le cas trivial d'une ligue à deux équipes). En effet, même si une équipe gagnait toutes ses confrontations, elle n'obtiendrait pas la totalité des points distribués dans

12. L'idée centrale de Fort et Quirk est bien résumée par Borooah et Mangan : « *In a perfectly balanced competition, each team would have an equal chance of winning each match and, therefore, of winning the championship or the league* » ([2012], p. 1094).

13. Historiquement, en raison de l'absence de matchs nuls dans le baseball, c'est l'écart type du nombre (ou du pourcentage) de victoires qui a principalement été utilisé. Un autre indicateur, le ratio de l'écart type observé sur un écart type « idéal » (Fort et Quirk [1995]), a également été largement mobilisé pour tenir compte du possible changement de taille de la ligue d'une saison à l'autre. Comme l'indiquent Cain et Haddock [2006], un tel écart type « idéal » n'est pas défini de manière satisfaisante dans les sports où les parties peuvent se terminer par un match nul.



le championnat. Ainsi, l'indice HHI sera borné supérieurement par une valeur strictement inférieure à 1. Cette borne supérieure (qui est précisée ci-dessous) sera, bien entendu, atteinte dans la configuration PCI.

La variance du pourcentage de points est  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2$ . Dans la littérature, on utilise indifféremment  $\sigma^2$  ou l'indice d'Hirshman-Herfindahl  $\text{HHI} = \sum_{i=1}^n s_i^2$  pour mesurer la *Competitive Balance*. En effet, de manière triviale :

$$n\sigma^2 = \text{HHI} - \frac{1}{n}.$$

D'autres auteurs ont privilégié le calcul d'un indice de Gini, établissant plus explicitement un pont entre mesure de l'*Imbalance* et mesure des inégalités. Si l'on désigne par  $p_e$  le nombre de points équivalents (qui correspondrait à une distribution égalitaire de points), l'indice de Gini peut se définir

comme  $I_{\text{Gini}} = 1 - \frac{p_e}{\bar{p}}$  où  $p_e = \frac{\sum_{i=1}^n (2i-1)p_i}{n^2}$  (attention, par hypothèse ici,

$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ ). Comme  $\bar{p} = 2(n-1)$ , on a finalement :

$$I_{\text{Gini}} = \frac{n+1}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n ip_i}{(n-1)n^2}.$$

Précisons les valeurs prises par ces différents indices dans les deux configurations polaires ci-dessus évoquées.

– Dans le cas de la PCB, chaque équipe obtient le même nombre de points,  $p_i = 2(n-1)$ . Trivialement, on a  $\sigma_{\text{PCB}}^2 = 0$  et  $\text{HHI}_{\text{PCB}} = \frac{1}{n}$ .

De même,  $p_{e,\text{PCB}} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 2(2i-1)(n-1) = 2(n-1) = \bar{p}$  et donc  $I_{\text{Gini,PCB}} = 0$ .

– Dans le cas de la PCI, on a  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, p_i = 4(n-i)$ . On peut établir que (cf. Adjemian *et al.* [2012]) :

$$\text{HHI}_{\text{PCI}} = \frac{2(2n-1)}{3n(n-1)}$$

et donc que :

$$\sigma_{\text{PCI}}^2 = \frac{n+1}{3n^2(n-1)}.$$

Enfin, il est également possible de montrer que  $p_{e,\text{PCI}} = \frac{2(n-1)(2n-1)}{3n}$  et donc que :

$$I_{\text{Gini,PCI}} = \frac{n+1}{3n} = n(n-1)\sigma_{\text{PCI}}^2.$$



Le fait que l'indice de Gini et la variance du pourcentage de points soient cardinalement équivalents en PCI est propre à certaines régularités d'attribution des points (telles que celles observées dans cette configuration hypothétique très particulière). Dans d'autres configurations mélangeant PCB et PCI que nous allons décrire par la suite, cette particularité apparaîtra également. Néanmoins, cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas général.

La caractérisation des deux cas polaires de distributions des points nous ouvre l'opportunité de faire naître une famille de configurations hypothétiques de distributions. Le dispositif original sur lequel nous nous appuyons dans cet article consiste à *remplacer un sous-ensemble de  $k$  équipes d'une distribution initialement en PCI par un bloc de  $k$  équipes en PCB*, ce qui permet d'introduire une plage d'intense rivalité concurrentielle pour un sous-groupe particulier d'équipes dans le championnat. Dotés de ce dispositif, nous allons pouvoir envisager différentes issues virtuelles de championnats et soulever la question de l'aptitude des indices décrits ci-dessus à convenablement mesurer l'attractivité des ligues, qu'elles soient fermées ou avec promotion et relégation.

## SUBSTITUTION D'ÉQUIPES EN PCI PAR DES ÉQUIPES EN PCB DANS UNE DISTRIBUTION

Dans cette section, nous allons tout d'abord caractériser le principe de substitution d'un (ou plusieurs) bloc(s) d'équipes en PCI par un (ou plusieurs) bloc(s) d'équipes en PCB (sans que la taille de la ligue ne soit modifiée). Nous examinerons ensuite l'impact de telles insertions sur les valeurs prises par les indices de *Competitive Balance* traditionnels.

### Caractérisation

#### *Substitution d'un bloc d'équipes en PCI par un bloc d'équipes en PCB*

Considérons une distribution de  $n$  équipes initialement en PCI et supposons qu'un sous-ensemble de  $k$  équipes consécutives de cette distribution ( $2 \leq k < n$ ) se « neutralisent » désormais et terminent le championnat sur un pied de parfaite égalité. Tout se passe comme si les  $k$  équipes situées entre les rangs  $m_1 + 1$  et  $m_1 + k$  inclus ( $0 \leq m_1 \leq (n - k)$ ), au lieu d'être parfaitement hiérarchisées (ce qui aurait été l'issue d'un championnat où la  $(m_1 + 1)$ <sup>ième</sup> équipe aurait gagné tous ses matchs contre les  $(k - 1)$  autres, la  $(m_1 + 2)$ <sup>ième</sup> équipe aurait perdu ses deux matchs contre la  $(m_1 + 1)$ <sup>ième</sup> et gagné tous ses matchs contre les  $(k - 2)$  autres...), avaient toutes, désormais, le même nombre de points, en ayant gagné une fois et perdu une fois contre les  $(k - 1)$  autres équipes du bloc (les résultats face aux  $(n - k)$  autres équipes étant inchangés). Soit  $m_2 = n - k - m_1$ . L'entier  $m_2$  désigne le nombre d'équipes en PCI situées sous le bloc de  $k$  équipes en PCB. La distribution des points après substitution d'un bloc de  $k$  équipes en PCI par un bloc de  $k$  équipes en PCB est présentée dans le tableau 1.

Tableau 1. Distribution des points après substitution d'un bloc de  $k$  équipes en PCI par un bloc de  $k$  équipes en PCB

Rang	Points	Blocs
1 <sup>er</sup>	$4(n-1)$	$m_1$ équipes en PCI
2 <sup>e</sup>	$4(n-2)$	
...		
$m_1$ ième	$4(n-m_1)$	
$(m_1+1)$ ième	$4m_2+2(k-1)$	$k$ équipes en PCB
$(m_1+2)$ ième	$4m_2+2(k-1)$	
...	$4m_2+2(k-1)$	
$(m_1+k)$ ième	$4m_2+2(k-1)$	
$(m_1+k+1)$ ième	$4(n-m_1-k-1)$	$m_2$ équipes en PCI
$(m_1+k+2)$ ième	$4(n-m_1-k-2)$	
...		
$(n-1)$ ième = $(m_1+k+m_2-1)$ ième	$4(n-m_1-k-m_2+1)$	
$n$ ième = $(m_1+k+m_2)$ ième	$4(n-m_1-k-m_2) = 0$	

Remarquons qu'en partant d'une telle configuration hypothétique, nous pourrions présenter les cas polaires PCI et PCB comme les cas particuliers de la distribution ci-dessus correspondant, respectivement, à  $k=1$  et  $k=n$ .

### Substitution de deux blocs d'équipes en PCI par deux blocs d'équipes en PCB

Désignons par  $k_1$  et  $k_2$  les tailles respectives des deux blocs (avec  $k_1+k_2=k$ ) et par  $m_1$  et  $m_2$  les rangs permettant d'identifier la position des blocs dans la distribution : les équipes du bloc de taille  $k_1$  se situent entre les rangs  $m_1+1$  et  $m_1+k_1$  inclus ; les équipes du bloc de taille  $k_2$  se situent entre les rangs  $m_1+k_1+m_2+1$  et  $m_1+k_1+m_2+k_2$  inclus. Soit  $m_3 = n - (m_1+k_1+m_2+k_2)$ . L'entier  $m_3$  désigne le nombre d'équipes en PCI situées sous le second bloc d'équipes en PCB. Pour être en mesure de distinguer strictement la substitution d'un ou de deux blocs d'équipes, nous devons imposer que  $m_2 > 0$  (une équipe au moins doit s'intercaler entre les deux blocs en PCB).

La distribution des points après substitution de deux blocs d'équipes en PCI par des blocs d'équipes en PCB est présentée dans le tableau 2.

Tableau 2. Distribution des points après substitution de deux blocs d'équipes en PCI par des blocs d'équipes en PCB

Rang	Points	Blocs
1 <sup>er</sup>	$4(n-1)$	$m_1$ équipes en PCI
2 <sup>e</sup>	$4(n-2)$	
...	...	
$m_1$ ième	$4(n-m_1)$	
$(m_1+1)$ ième	$4(n-m_1)-2(k_1+1)$	$k_1$ équipes en PCB
$(m_1+2)$ ième	$4(n-m_1)-2(k_1+1)$	
...	$4(n-m_1)-2(k_1+1)$	
$(m_1+k_1)$ ième	$4(n-m_1)-2(k_1+1)$	
$(m_1+k_1+1)$ ième	$4(n-m_1-k_1-1)$	$m_2$ équipes en PCI
$(m_1+k_1+2)$ ième	$4(n-m_1-k_1-2)$	
...	...	
$(m_1+k_1+m_2)$ ième	$4(n-m_1-k_1-m_2)$	
$(m_1+k_1+m_2+1)$ ième	$4(n-m_1-k_1-m_2)-2(k_2+1)$	$k_2$ équipes en PCB
$(m_1+k_1+m_2+2)$ ième	$4(n-m_1-k_1-m_2)-2(k_2+1)$	
...	...	
$(m_1+k_1+m_2+k_2)$ ième	$4(n-m_1-k_1-m_2)-2(k_2+1)$	
$(m_1+k_1+m_2+k_2+1)$ ième	$4(n-m_1-k_1-m_2-k_2-1)$	$m_3$ équipes en PCI
$(m_1+k_1+m_2+k_2+2)$ ième	$4(n-m_1-k_1-m_2-k_2-2)$	
...	...	
$(m_1+k_1+m_2+k_2+m_3-1)$ ième	$4(n-m_1-k_1-m_2-k_2-m_3+1) = 4$	
$(m_1+k_1+m_2+k_2+m_3)$ ième	$4(n-m_1-k_1-m_2-k_2-m_3) = 0$	

REMARQUE. On peut, de la même manière, caractériser la substitution de 3, 4, ... p blocs d'équipes en PCI par des blocs d'équipes en PCB dans la limite de ce que la taille n de la ligue permet.

### Propriétés

#### Un bloc de PCB

Dans une ligue à n clubs, la variance du pourcentage de points obtenus par (n - k) clubs en PCI et k clubs en PCB (2 ≤ k < n) est, quelle que soit la position du bloc de k équipes en PCB :

$$\sigma^2_{1 \text{ Bloc PCB}} = \frac{1}{3n^3(n-1)^2} [n(n^2-1) - k(k^2-1)]. \tag{1}$$

*Démonstration : cf. Annexe 1.*

On a, de plus :

$$p_{e,1 \text{ Bloc PCB}} = \frac{2}{3n^2} [n(n-1)(2n-1) - k(k^2-1)] \quad (2)$$

si bien que :

$$I_{\text{Gini},1 \text{ Bloc PCB}} = \frac{1}{3n^2(n-1)} [n(n^2-1) - k(k^2-1)] = n(n-1)\sigma^2_{1 \text{ Bloc PCB}}. \quad (3)$$

On remarque que la variance du pourcentage de points ainsi que l'indice de Gini diminuent avec le nombre de clubs en PCB introduits.

### Deux blocs de PCB

Dans une ligue à  $n$  clubs, la variance du pourcentage de points obtenus par  $(n - k_1 - k_2)$  clubs en PCI et deux blocs de clubs en PCB de tailles respectives  $k_1$  et  $k_2$  ( $4 \leq k_1 + k_2 < n$ ) est, *quelles que soient les positions* des blocs d'équipes en PCB :

$$\sigma^2_{2 \text{ Blocs PCB}} = \frac{1}{3n^3(n-1)^2} [n(n^2-1) - k_1(k_1^2-1) - k_2(k_2^2-1)]. \quad (4)$$

*Démonstration : cf. Annexe 2.*

On a, de plus :

$$p_{e,2 \text{ Blocs PCB}} = \frac{2}{3n^2} [n(n-1)(2n-1) - k_1(k_1^2-1) - k_2(k_2^2-1)] \quad (5)$$

si bien que :

$$\begin{aligned} I_{\text{Gini},2 \text{ Blocs PCB}} &= \frac{1}{3n^2(n-1)} [n(n^2-1) - k_1(k_1^2-1) - k_2(k_2^2-1)] \\ &= n(n-1)\sigma^2_{2 \text{ Blocs PCB}}. \end{aligned} \quad (6)$$

REMARQUE. Lorsque les deux blocs sont de taille identique ( $k_1 = k_2 = \frac{k}{2}$ ), on a :

$$\sigma^2_{2 \text{ Blocs Id PCB}} = \frac{1}{3n^3(n-1)^2} [n(n^2-1) - k\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)]. \quad (7)$$

### Comparaison des variances et des indices de Gini

Lorsqu'on compare les variances obtenues avec un ou deux blocs d'équipes de taille identique en PCB (c'est-à-dire lorsque  $k_1 = k_2 = \frac{k}{2}$ ), la variance du pourcentage de points est plus forte lorsque les équipes sont divisées en deux blocs plutôt que regroupées en un seul bloc. En effet :

$$\sigma^2_{2 \text{ Blocs Id PCB}} - \sigma^2_{1 \text{ Bloc PCB}} = \frac{k^3}{4n^3(n-1)^2} > 0. \quad (8)$$

De même, lorsqu'on compare les indices de Gini, on obtient :

$$I_{\text{Gini},2 \text{ Blocs Id PCB}} - I_{\text{Gini},1 \text{ Bloc PCB}} = \frac{k^3}{4n^2(n-1)} > 0. \quad (9)$$

## LES INSUFFISANCES DES INDICES DE COMPETITIVE BALANCE TRADITIONNELS

Pour mettre en évidence les insuffisances des indices traditionnels, nous allons examiner des cas particuliers des configurations hypothétiques détaillées ci-dessus. Ces configurations particulières vont retenir notre attention car elles permettent de figurer des intuitions simples quant au plus ou moins fort niveau d'attractivité des ligues considérées. Dès lors, nous évaluerons si les indices traditionnels sont en mesure de capturer convenablement ces intuitions, dans les ligues fermées comme dans les ligues avec promotion et relégation.

### Cas d'une ligue fermée

Nous allons comparer une configuration dite de « choc des titans » (CT) et une configuration dite de « ventre mou » (VM). La configuration CT correspond à l'issue d'un championnat très disputé dans la partie haute du classement, tandis que, dans la configuration VM, la rivalité concurrentielle a été intense en milieu de tableau. Il serait attendu d'un indice d'*Imbalance/Attractivité* de la ligue fermée qu'il alloue, toutes choses égales par ailleurs, une valeur plus faible<sup>14</sup> à la configuration CT qu'à la configuration VM. Autrement dit, une propriété

Tableau 3. « Choc des titans » versus « ventre mou »

Choc des titans			Ventre mou			
Rang	Points	Blocs	Rang	Points	Blocs	
1 <sup>er</sup>	$4n - 2(k + 1)$	$k$ équipes en PCB	1 <sup>er</sup>	$4(n - 1)$	$[(n - k)/2]$ équipes en PCI	
2 <sup>e</sup>	$4n - 2(k + 1)$		2 <sup>e</sup>	$4(n - 2)$		
...			...			
$k^{\text{ième}}$	$4n - 2(k + 1)$		...			
$(k + 1)^{\text{ième}}$	$4(n - k - 1)$	$(n - k)$ équipes en PCI	$[(n - k)/2]^{\text{ième}}$	$2(n + k)$	$k$ équipes en PCB	
$(k + 2)^{\text{ième}}$	$4(n - k - 2)$		$[(n - k)/2] + 1^{\text{ième}}$	$2(n - 1)$		
...			$[(n - k)/2] + 2^{\text{ième}}$	$2(n - 1)$		
			...			
			$[(n - k)/2] + k^{\text{ième}}$	$2(n - 1)$		
			$[(n + k)/2] + 1^{\text{ième}}$	$4(n - [(n + k)/2] - 1) = 2(n - k - 2)$		$[(n - k)/2]$ équipes en PCI
...			...			
		...				
$(n - 1)^{\text{ième}}$	$4(n - (n - 1)) = 4$	$(n - 1)^{\text{ième}}$	$4(n - (n - 1)) = 4$			
$n^{\text{ième}}$	$4(n - n) = 0$	$n^{\text{ième}}$	$4(n - n) = 0$			

14. Plus l'*Imbalance* est faible, plus l'attractivité est forte.

souhaitable d'un indice d'*Imbalance/Attractivité* serait qu'il prenne une valeur plus faible lorsque la rivalité concurrentielle est forte en haut du classement. Les indices traditionnels remplissent-ils convenablement une telle fonction ? Les configurations CT et VM correspondent toutes les deux à l'insertion d'un bloc de  $k$  équipes en PCB dans une distribution initialement en PCI. Dans le cas CT, le bloc est situé en haut de distribution ; dans le cas VM, il est situé en milieu de distribution. Le plus naturel (pour être en adéquation avec l'intuition du « ventre mou ») est de supposer que  $\frac{n-k}{2}$  équipes sont situées au-dessus du bloc en PCB et, subséquemment, que  $\frac{n-k}{2}$  équipes sont situées en dessous du bloc en PCB. Les caractéristiques des configurations CT et VM sont schématisées dans le tableau 3. En application des équations (1) et (3), on a :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{CT} &= \sigma^2_{VM} \\ I_{GiniCT} &= I_{GiniVM}.\end{aligned}$$

Par conséquent, les indices de *Competitive Balance* traditionnels ( $\sigma^2$ , Gini) sont inaptes à différencier les deux configurations ci-dessus, pourtant relatives à des déroulements de championnats dont on peut penser qu'ils furent très différents. Ils apparaissent donc peu appropriés pour mesurer l'attractivité d'une ligue fermée.

Qu'en est-il maintenant de leur aptitude à mesurer l'attractivité d'une ligue avec promotion et relégation ?

### Cas d'une ligue avec promotion et relégation

Nous allons maintenant comparer une configuration dite de « tête et queue disputées » (TQD) et une configuration de « ventre mou » (VM). La configuration TQD est supposée être l'issue d'un championnat très disputé dans la partie haute ainsi que dans la partie basse du classement. Comme précédemment, la configuration VM est supposée être l'issue d'une compétition très disputée en milieu de tableau. Il serait attendu d'un indice d'*Imbalance/Attractivité* de la ligue avec promotion et relégation qu'il alloue, toutes choses égales par ailleurs, une valeur plus faible à la configuration TQD qu'à la configuration VM.

La configuration TQD correspond à l'insertion de deux blocs d'équipes en PCB dans une distribution initialement en PCI. Le plus naturel (pour être en adéquation avec l'intuition de « tête et queue disputées ») est de supposer que les deux blocs en PCB sont de taille identique et donc subséquemment de taille  $k/2$ , positionnés, pour l'un, tout en haut du classement, et pour l'autre, tout en bas. La configuration VM correspond toujours à l'insertion d'un bloc de  $k$  équipes en PCB comme précédemment décrit dans le cas de la ligue fermée.

Les caractéristiques des configurations TQD et VM sont schématisées dans le tableau 4.

En application des équations (8) et (9), on a :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{TQD} &> \sigma^2_{VM} \\ I_{GiniTQD} &> I_{GiniVM}.\end{aligned}$$

Ces indices de *Competitive Balance* traditionnels conduisent à une appréciation de l'attractivité des ligues avec promotion et relégation en totale contradiction

Tableau 4. « Tête et queue disputées » versus « ventre mou »

Tête et queue disputées			Ventre mou		
Rang	Points	Blocs	Rang	Points	Blocs
1 <sup>er</sup>	$4n - (k + 2)$	$(k/2)$ équipes en PCB	1 <sup>er</sup>	$4(n - 1)$	$[(n - k)/2]$ équipes en PCI
2 <sup>e</sup>	$4n - (k + 2)$		2 <sup>e</sup>	$4(n - 2)$	
...			...		
$(k/2)$ ième	$4n - (k + 2)$		...		
$[(k/2) + 1]$ ième	$4(n - 1) - 2k$	$(n - k)$ équipes en PCI	$[(n - k)/2]$ ième	$2(n + k)$	$k$ équipes en PCB
$[(k/2) + 2]$ ième	$4(n - 2) - 2k$		$[(n - k)/2] + 1$ ième	$2(n - 1)$	
...			$[(n - k)/2] + 2$ ième	$2(n - 1)$	
...			...		
...			$[(n + k)/2]$ ième	$2(n - 1)$	
$[n - (k/2)]$ ième	$2k$		$[(n + k)/2] + 1$ ième	$2(n - k - 2)$	
$[n - (k/2) + 1]$ ième	$k - 2$	$(k/2)$ équipes en PCB	...		$[(n - k)/2]$ équipes en PCI
...			...		
$(n - 1)$ ième	$k - 2$		$(n - 1)$ ième	$4(n - (n - 1)) = 4$	
$n$ ième	$k - 2$		$n$ ième	$4(n - n) = 0$	

avec l'intuition ci-dessus décrite (grand intérêt pour la rivalité concurrentielle *en haut et en bas* de classement plutôt qu'*en milieu* de classement). Ils prennent en compte le nombre de clubs concernés par une rivalité concurrentielle forte (paramètre  $k$ ) mais captent incorrectement le rôle que joue la position dans le classement de chacun de ces clubs dans la mesure de l'attractivité de la ligue. Plus encore que dans le cas d'une ligue fermée, les indices traditionnels semblent donc inappropriés pour mesurer l'attractivité d'une ligue avec promotion et relégation.

Nous allons maintenant proposer une famille d'indices permettant d'accorder une importance différenciée à ce qui se passe en haut, milieu ou bas de classement.

### UN NOUVEL INDICE DE COMPETITIVE IMBALANCE/ATTRACTIVITÉ

Pour construire ce nouvel indice, nous allons nous appuyer sur la notion de nombre de points équivalents (qui correspondrait à une distribution égalitaire de points)  $p_e$ , mobilisée dans la construction de l'indice de Gini.

Rappelons qu'ici, par hypothèse,  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ . Blackorby et Donaldson [1978] et Dorfman [1979] ont établi qu'il est possible d'objectiver le nombre de points équivalents  $p_e$  apparaissant dans l'indice de Gini comme :

$$p_e = p_1 \left( \frac{1}{n} \right)^2 + p_2 \left[ \left( \frac{2}{n} \right)^2 - \left( \frac{1}{n} \right)^2 \right] + \dots + p_{n-1} \left[ \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 - \left( \frac{n-2}{n} \right)^2 \right] + p_n \left[ \left( \frac{n}{n} \right)^2 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right]$$



c'est à dire :

$$p_e = p_1 \phi\left(\frac{1}{n}\right) + p_2 \left[ \phi\left(\frac{2}{n}\right) - \phi\left(\frac{1}{n}\right) \right] + \dots + p_{n-1} \left[ \phi\left(\frac{n-1}{n}\right) - \phi\left(\frac{n-2}{n}\right) \right] + p_n \left[ \phi\left(\frac{n}{n}\right) - \phi\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

avec  $\forall q \in [0; 1], \phi(q) = q^2$ .

Cette écriture est formellement identique à la spécification de la *Dual Theory* de Yaari [1987] s'appliquant pour évaluer la « satisfaction » obtenue par un décideur lorsqu'il participe à la loterie  $\left( p_n, \frac{1}{n}; p_{n-1}, \frac{1}{n}; \dots; p_1, \frac{1}{n} \right)$  où les  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1$ , ordonnés par ordre croissant, sont des conséquences réelles<sup>15</sup> équiprobables. Dans ce cadre, la fonction  $\phi$  est interprétée comme une fonction de transformation des probabilités ; sa particularité est que la transformation des probabilités qui s'opère dépend du rang où se situent les résultats auxquels sont associées les probabilités considérées.

Ce cadre d'analyse est fructueux dans la perspective de l'objectivation d'une différenciation de la valeur du nombre de points équivalents selon le type de ligue étudiée. Dans le cas d'une ligue fermée, nous allons faire le choix d'une fonction de transformation qui accorde un poids plus élevé aux points obtenus par les équipes du haut de tableau ; dans le cas d'une ligue avec promotion et relégation, nous choisirons une fonction de transformation qui accorde un poids plus élevé aux points obtenus à la fois par les équipes du haut et par les équipes du bas de tableau. Cependant, le calcul d'un tel indice ne pourra pas se faire comme le calcul de l'indice de Gini traditionnel : en effet, rien ne garantit désormais que le nombre de points équivalents  $p_e$  sera inférieur ou égal au nombre de points moyen  $\bar{p}$ . Dans un cadre où opère une telle fonction de transformation, les bornes inférieures et supérieures du nombre de points équivalents sont  $p_{e\phi\min} = p_{e\phi\text{PCB}}$  et  $p_{e\phi\max} = p_{e\phi\text{PCI}}$ . Dans l'esprit des recommandations de Curry et Georges [1983], la forme qui peut naturellement être suggérée pour un indice de *Concentration/Imbalance* est :

$$\phi\text{Index} = \frac{p_e \phi - p_{e\phi\min}}{p_{e\phi\max} - p_{e\phi\min}}$$

où 
$$p_e \phi = p_1 \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{i=2}^n p_i \left[ \phi\left(\frac{i}{n}\right) - \phi\left(\frac{i-1}{n}\right) \right],$$

et  $p_{e\phi\min}$  et  $p_{e\phi\max}$  désignent respectivement les valeurs minimale et maximale du nombre de points équivalent dérivés de la mise en œuvre de la fonction de transformation  $\phi$ .

Venons-en maintenant aux fonctions  $\phi$  qui vont permettre de distinguer les ligues fermées (LF) et les ligues avec promotion et relégation (LP&R). Dans le cas LF, nous opterons pour une fonction  $\phi$  concave qui accordera effectivement un poids plus élevé aux équipes situées en haut de tableau. Dans le cas LP&R, nous opterons pour une « fonction en S » (*S-Shaped*) qui permettra d'accorder

15. Dans la présente formalisation, les  $p_i$  désignent les conséquences ou résultats et non les probabilités, ce qui est passablement perturbant !

un poids plus conséquent aux équipes à la fois en haut et en bas de classement. Nous pouvons retenir, par exemple, les spécifications suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_{LF}(q) &= q^\alpha \\ \phi_{LP\&R}(q) &= 1 - \frac{(1-q)^\alpha}{\left[ q^\alpha + (1-q)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}} \end{aligned}$$

où  $\alpha$  désigne un paramètre appartenant à l'intervalle ]0 ; 1[.

Au titre d'une application, nous allons calculer les valeurs des  $\phi$ Index d'*Imbalance/Attractivité* dans les configurations hypothétiques que nous avons présentées dans la section précédente (CT *versus* VM en ligue fermée, TQD *versus* VM en ligue avec promotion et relégation). Dans les deux cas, nous allons retenir un exemple pour lequel  $n = 20$ . Pour la confrontation entre les configurations CT et VM en ligue fermée, nous retiendrons  $k = 4$  ; pour la confrontation entre les configurations TQD et VM en ligue avec P&R, nous retiendrons  $k = 10$ . Enfin, nous calculons les  $\phi$ Index pour  $\alpha = 0,75$ . Les résultats sont présentés dans le tableau 5.

Dans le cas de la ligue fermée, alors que nous avons en effet  $I_{Gini,CT} = I_{Gini,VM}$ , nous obtenons que  $\phi_{LF}Index(CT) < \phi_{LF}Index(VM)$ . Dans le cas de la ligue avec promotion et relégation, alors que  $I_{Gini,TQD} > I_{Gini,VM}$ , nous obtenons que  $\phi_{LP\&R}Index(TQD) < \phi_{LP\&R}Index(VM)$ .

Quand l'attractivité de la ligue – au sens où nous l'entendons pour chaque type de ligues – croît, les  $\phi$ Index d'*Imbalance/Attractivité* voient en effet leur valeur baisser. La mise en œuvre de tels indices permet donc de capturer l'idée que l'existence d'une intense ou d'une faible rivalité concurrentielle aux différents niveaux du classement de la ligue n'a pas la même importance pour les consommateurs. Dès lors, il est possible de différencier les ligues selon leur type (Fermé ou avec Promotion et Relégation). Le  $\phi$ Index est un indice d'*Imbalance transformé* au sens où la dispersion mesurée est, selon la position des équipes dans le classement de la ligue, surpondérée ou sous-pondérée. Il s'agit, en quelque sorte, d'un indice « subjectif » d'attractivité de la ligue. Le paramètre  $\alpha$  est un indicateur de l'importance que l'on souhaite accorder à des zones singulières du classement.

Dans le cas d'une ligue fermée, le choix d'un paramètre  $\alpha$  inférieur à 1 revient à accorder plus de poids à la partie haute du classement, tandis que le choix d'un paramètre  $\alpha$  supérieur à 1 conduirait à accorder plus de poids à la partie basse, ce qui n'est guère approprié dans le cadre d'une mesure de l'*Imbalance/Attractivité* (alors qu'il s'agit d'une option raisonnable en mesure des inégalités de revenu)<sup>16</sup>. Dans le cas particulier où  $\alpha = 2$ , nous retrouvons l'indice de Gini, caractérisé, en outre, par une insensibilité à la position d'un bloc d'équipes en rivalité concurrentielle parfaite.

Dans le cas d'une ligue avec promotion et relégation, le choix d'un paramètre  $\alpha$  inférieur à 1 permet d'obtenir la forme fonctionnelle en « S » qui accordera plus de poids simultanément aux parties hautes et basses du classement.

16. Bien entendu, dans le cas particulier où  $\alpha = 1$ , la différenciation opérée entre des zones singulières du classement n'existe plus et l'indice se réduit à la moyenne simple.

Tableau 5. Calcul des  $\phi$  Index en ligue fermée et en ligue avec P&R

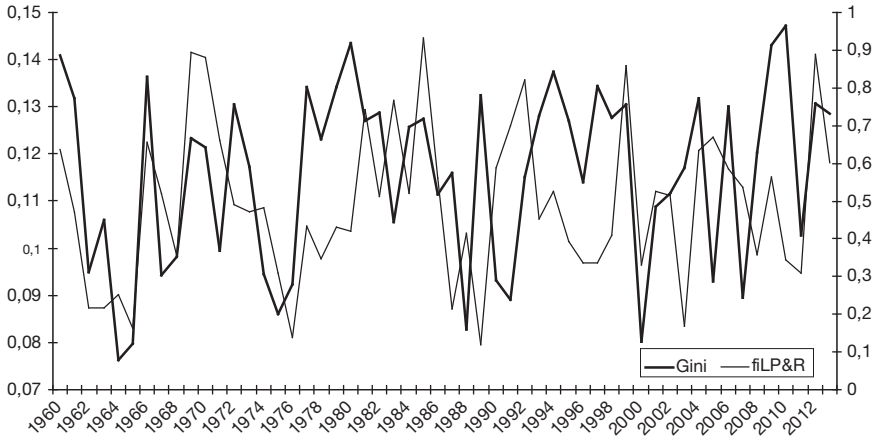
Ligue fermée	VM	CT	Ligue P&R	VM	TQD
1 <sup>er</sup>	76	70	1 <sup>er</sup>	76	68
2 <sup>e</sup>	72	70	2 <sup>e</sup>	72	68
3 <sup>e</sup>	68	70	3 <sup>e</sup>	68	68
4 <sup>e</sup>	64	70	4 <sup>e</sup>	64	68
5 <sup>e</sup>	60	60	5 <sup>e</sup>	60	68
6 <sup>e</sup>	56	56	6 <sup>e</sup>	38	56
7 <sup>e</sup>	52	52	7 <sup>e</sup>	38	52
8 <sup>e</sup>	48	48	8 <sup>e</sup>	38	48
9 <sup>e</sup>	38	44	9 <sup>e</sup>	38	44
10 <sup>e</sup>	38	40	10 <sup>e</sup>	38	40
11 <sup>e</sup>	38	36	11 <sup>e</sup>	38	36
12 <sup>e</sup>	38	32	12 <sup>e</sup>	38	32
13 <sup>e</sup>	28	28	13 <sup>e</sup>	38	28
14 <sup>e</sup>	24	24	14 <sup>e</sup>	38	24
15 <sup>e</sup>	20	20	15 <sup>e</sup>	38	20
16 <sup>e</sup>	16	16	16 <sup>e</sup>	16	8
17 <sup>e</sup>	12	12	17 <sup>e</sup>	12	8
18 <sup>e</sup>	8	8	18 <sup>e</sup>	8	8
19 <sup>e</sup>	4	4	19 <sup>e</sup>	4	8
20 <sup>e</sup>	0	0	20 <sup>e</sup>	0	8
$\sigma^2$	0,000914	0,000914	$\sigma^2$	0,000807	0,000893
Gini	0,3474	0,3474	Gini	0,3066	0,3395
$P_{e\phi}$	42,395	42,194	$P_{e\phi}$	39,605	39,551
$P_{e\phi\min}$	38	38	$P_{e\phi\min}$	38	38
$P_{e\phi\max}$	43,670	43,670	$P_{e\phi\max}$	39,712	39,712
$\phi_{LF}$ Index	<b>0,9960</b>	<b>0,9464</b>	$\phi_{LP\&R}$ Index	<b>0,9374</b>	<b>0,9060</b>

### Exemple d'une ligue avec promotion et relégation

Calculons le  $\phi_{LP\&R}$  Index de la première ligue de football professionnelle française entre les saisons 1959/1960 et 2012/2013 (pour  $\alpha = 0,75$ ) et comparons-le (graphique 1) avec l'indice de Gini traditionnel (les distributions finales de points ayant toutes été recalculées avec un système d'attribution de points 2-1-0).

Le  $\phi_{LP\&R}$  Index (graduation à droite) est un indice approprié pour apprécier l'*Imbalance/Attractivité* d'une telle ligue, tandis que l'indice de Gini (graduation à gauche) est une mesure d'inégalités dont les propriétés ne semblent guère adaptées à l'exercice. La comparaison des deux séries nous convainc que la transformation mise en œuvre modifie substantiellement l'appréciation que l'on peut

Graphique 1.  $\phi_{LP\&R}$  Index et Gini, France 1960-2013



avoir de l'*Imbalance* de la ligue et de son évolution d'une saison à l'autre. Si, par exemple, entre 2012 et 2013<sup>17</sup> les évolutions des deux indices sont concordantes pour révéler une diminution de l'*Imbalance*, les tendances divergent entre 2009 et 2010 (l'indice de Gini s'accroît, tandis que le  $\phi_{LP\&R}$  Index diminue) ou entre 1997 et 1998 (l'indice de Gini diminue, tandis que le  $\phi_{LP\&R}$  Index s'accroît). Dans un futur travail appliqué, et dans le but d'apprécier la pertinence des  $\phi$  Index de *Competitive Imbalance*, il serait intéressant de mener un travail économétrique visant à étudier si le recours à ce type d'indice permet ou non d'améliorer significativement la corrélation entre la mesure de l'*Imbalance* et l'audience de la ligue (en France et dans les autres ligues européennes).

## CONCLUSION

L'un des défis majeurs auxquels sont confrontées les ligues de sports professionnels est de maintenir un certain degré d'incertitude sur le résultat final des compétitions. En effet, si les résultats deviennent trop prévisibles, l'absence de suspens diminue l'attrait des confrontations proposées au public. Les ressorts de l'attractivité des ligues semblent quelque peu différents dans les ligues fermées et dans les ligues avec promotion et relégation. L'intérêt pour la rivalité concurrentielle en bas de classement s'ajoute, dans les secondes, à l'intérêt que les consommateurs portent naturellement pour la rivalité en haut de classement dans tous types de ligues. Dans cet article, nous avons montré que les mesures traditionnelles de *Competitive Balance* sont peu appropriées pour rendre compte de l'intérêt particulier que les spectateurs peuvent accorder à la rivalité dans une ou plusieurs zones particulières du classement. Nous proposons donc une mesure généralisée permettant de moduler le poids accordé à chaque zone du classement et sommes désormais aptes à différencier la mesure de l'*Imbalance/Attractivité*

17. « 2012 » désigne la saison 2011/2012 et « 2013 » désigne la saison 2012/2013. Il en va de même pour toutes les années auxquelles il est fait référence.

dans les ligues fermées et dans les ligues avec promotion et relégation. Dans la perspective de la définition de *League Welfare Function* pertinentes, il conviendrait aussi de tenir compte de cet intérêt plus marqué pour des zones particulières du classement. Il faudrait alors s'appuyer sur des fonctions objectif différenciées pour éclairer le débat sur la supériorité, en termes de bien-être, d'un type de ligue sur l'autre.

### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ADJEMIAN S., GAYANT J.P. et LE PAPE N. [2012], « A generalised index of competitive balance in professional sports leagues », *GAINS Working Paper* 12.01, Université du Maine, Le Mans, France.
- BLACKORBY C. et DONALDSON D. [1978], « Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare », *Journal of Economic Theory*, 18, p. 59-80.
- BOROOAH V.K. et MANGAN J. [2012], « Measuring competitive balance in sports using generalized entropy with an application to English premier league football », *Applied Economics*, 44, p. 1093-1102.
- CAIN L.P. et HADDOCK D.D. [2006], « Measuring parity: Tying into idealized standard deviation », *Journal of Sports Economics*, 7, p. 330-338.
- CURRY B. et GEORGES K.D. [1983], « Industrial concentration: a survey », *Journal of Industrial Economics*, 31 (3), p. 203-255.
- DIETL H.M., LANG M. et WERNER S. [2009], « Social welfare in sports leagues with profit-maximizing and/or win-maximising clubs », *Southern Economic Journal*, 76 (2), p. 375-396.
- DORFMAN R. [1979], « A formula for the Gini coefficient », *Review of Economics and Statistics*, 61, p. 146-149.
- FORT R. et QUIRK J. [1995], « Cross-subdivization, incentives and outcomes in professional team sports leagues », *Journal of Economic Literature*, 33, p. 1265-1299.
- HOROWITZ I. [1997], « The increasing competitive balance in Major League Baseball », *Review of Industrial Organization* 12, p. 373-387.
- NOLL R. G. [2002], « The economics of promotion and relegation in sports leagues », *Journal of Sports Economics*, 3 (2), p. 169-203.
- SLOANE J. [1971], « The economics of professional football: the football club as a utility maximizer », *Scottish Journal of Political Economy*, 17 (2), p. 121-146.
- SZYMANSKI S. [2001], « Income inequality, competitive balance and attractiveness of team sports: Some evidence and a natural experiment from English soccer », *The Economic Journal*, 111, p. 69-84.
- SZYMANSKI S. [2003], « The economic design of sport contests », *Journal of Economic Literature*, 41 (4), p. 1137-1187.
- SZYMANSKI S. [2006], « The promotion and relegation system », dans ANDREFF W. et SZYMANSKI S. (eds), *Handbook on the Economics of Sport*, Cheltenham, Edward Elgar, p. 685-688.
- SZYMANSKI S. et VALETTI T.M. [2005], « Promotion and relegation in sporting contests », *Rivista di Politica Economica*, 95 (5/6), p. 3-39.
- UTT J. et FORT R. [2002], « Pitfall to measuring competitive balance with Gini coefficients », *Journal of Sports Economics*, 3 (4), p. 367-373.
- VROOMAN J. [2007], « Theory of the beautiful game: the unification of European football », *Scottish Journal of Political Economy*, 54 (3), p. 315-354.
- YAARI M. [1987], « The dual theory of choice under risk », *Econometrica*, 55 (1), p. 95-115.

ANNEXES

I. CALCUL DE LA VARIANCE DU POURCENTAGE DE POINTS APRÈS SUBSTITUTION  
D'UN BLOC D'ÉQUIPES EN PCI PAR UN BLOC DE  $k$  CLUBS EN PCB

On suppose que les  $m_1$  premiers clubs du championnat sont en PCI, que les  $m_2$  derniers clubs sont également en PCI et qu'entre ces deux blocs s'intercale un bloc en PCB (de taille  $(n - m_1 - m_2)$ ). Dans une telle configuration, la structure des points par club est :

$$p_i = 4(n - i) \text{ pour } i \in \{1 ; m_1\} \cup \{n - m_2 + 1 ; n\} .$$

$$p_i = 2(n - m_1 - m_2 - 1) + 4m_2 \text{ pour } i \in \{m_1 + 1 ; n - m_2\} .$$

Le nombre total de points distribués vérifie :

$$P = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^{m_1} 4(n - i) + \sum_{i=m_1+1}^{n-m_2} (2(n - m_1 - m_2 - 1) + 4m_2) + \sum_{i=n-m_2+1}^n 4(n - i) = 2n(n - 1) .$$

Calculons la somme des carrés des points :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i^2 &= \sum_{i=1}^{m_1} 16(n - i)^2 + \sum_{i=m_1+1}^{n-m_2} (4(n - m_1 - m_2 - 1)^2 + 16(n - m_1 - m_2 - 1)m_2 + 16m_2^2) \\ &\quad + \sum_{i=n-m_2+1}^n 16(n - i)^2 \end{aligned}$$

sachant que  $\sum_{i=1}^m i = \frac{1}{2}m(m + 1)$  et que  $\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{1}{6}m(m + 1)(2m + 1)$ , on obtient, après simplification :

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 = \frac{4}{3} (2n(n - 1)(2n - 1) - m_1(m_1^2 - 1) - m_2(m_2^2 - 1)) .$$

Comme :  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2$  avec  $s_i = \frac{p_i}{P}$  et  $\bar{s} = \frac{1}{n}$ ,

on a alors :  $\sigma^2 = \frac{1}{nP^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 - \frac{1}{n^2}$ .

Après simplification, on obtient :

$$\sigma_{1 \text{ Bloc PCB}}^2 = \frac{(m_1 + m_2)(3n^2 - 1 - (m_1 + m_2)(3n - (m_1 + m_2)))}{3n^3(n - 1)^2} .$$

Si l'on note  $k$  le nombre de clubs en PCB ( $k = n - m_1 - m_2$ ), cette dernière expression peut aussi s'écrire :

$$\sigma_{1 \text{ Bloc PCB}}^2 = \frac{n(n^2 - 1) - k(k^2 - 1)}{3n^3(n - 1)^2} .$$

II. CALCUL DE LA VARIANCE DU POURCENTAGE DE POINTS APRÈS SUBSTITUTION DE DEUX BLOCS D'ÉQUIPES EN PCI PAR DES BLOCS DE  $k_1$  ET  $k_2$  CLUBS EN PCB

Les trois blocs de PCI sont de taille  $m_1, m_2, m_3$ . Entre ces blocs, s'intercalent deux blocs de PCB de taille  $k_1$  et  $k_2$ . Dans cette configuration, la structure des points par club est :

$$p_i = 4(n - i) \text{ pour } i \in \{1; m_1\} \cup \{m_1 + k_1 + 1; m_1 + k_1 + m_2\} \cup \{m_1 + k_1 + m_2 + k_2 + 1; n\}$$

$$p_i = 2(k_1 - 1) + 4(m_2 + k_2 + m_3) \text{ pour } i \in \{m_1 + 1; m_1 + k_1\}$$

$$p_i = 2(k_2 - 1) + 4m_3 \text{ pour } i \in \{m_1 + k_1 + m_2 + 1; m_1 + k_1 + m_2 + k_2\}.$$

Bien entendu, le nombre total de points distribués vérifie :

$$\begin{aligned} P = \sum_{i=1}^n p_i &= \sum_{i=1}^{m_1} 4(n - i) + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+k_1} (2(k_1 - 1) + 4(m_2 + k_2 + m_3)) + \sum_{i=m_1+k_1+1}^{m_1+k_1+m_2} 4(n - i) \\ &+ \sum_{i=m_1+k_1+m_2+1}^{m_1+k_1+m_2+k_2} (2(k_2 - 1) + 4m_3) + \sum_{i=m_1+k_1+m_2+k_2+1}^n 4(n - i) = 2n(n - 1). \end{aligned}$$

En calculant la somme des carrés des points, on obtient, après simplification :

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 = \frac{4}{3} (2n(n - 1)(2n - 1) - k_1(k_1^2 - 1) - k_2(k_2^2 - 1)).$$

Il en découle la variance du pourcentage de points de cette configuration :

$$\sigma_{2 \text{ Blocs PCB}}^2 = \frac{n(n^2 - 1) - k_1(k_1^2 - 1) - k_2(k_2^2 - 1)}{3n^3(n - 1)^2}.$$